

## **BAB 2**

### **LANDASAN TEORETIS**

#### **2.1 Kajian Teori**

##### **2.1.1 *Learning Trajectory***

Siswa dalam mempelajari sebuah konsep pembelajaran mempunyai alur belajar sendiri yang mereka alami, sama seperti halnya saat keterampilan motorik kasar mereka mulai berkembang dari awal mula belajar merangkak, berjalan, berlari kemudian melompat dan akhirnya mereka dapat melompat dengan kecepatan dan ketangkasan yang ditargetkan. Begitu juga dalam pembelajaran, mereka mengikuti perkembangan alamiah dalam proses belajar, khususnya dalam matematika. Mereka belajar mengenai ide-ide dan keterampilan mereka dengan cara mereka sendiri. Ketika para guru memahami alur perkembangan ini dan membuat kegiatan berurutan berdasarkan alur perkembangan siswa, mereka membangun lingkungan belajar matematika yang sangat efektif yang sesuai dengan tahapan perkembangan. Alur belajar matematika siswa dari keterampilan awal menuju keterampilan berikutnya inilah yang disebut dengan *Learning Trajectory* (lintasan belajar).

Istilah *learning trajectory* atau alur belajar pertama kali dikenalkan oleh (M. A. Simon, 1995) yaitu *hypothetical learning trajectory* (HLT) (p. 133). Menurut Simon HLT merupakan dugaan guru tentang alur belajar yang mungkin terjadi dalam pembelajaran di kelas (p. 135). Simon menggunakan istilah "*hypothetical*", karena alur belajar yang sebenarnya (*actual learning trajectory*) tidak diketahui di awal. Alur belajar yang sesungguhnya hanya dapat diketahui setelah pembelajaran berlangsung.

Selain Simon, ada beberapa tokoh yang mempunyai pandangan yang sama mengenai *learning trajectory*, antara lain (Daro, Mosher, & Corcoran, 2011) yang berpendapat bahwa *learning trajectory* adalah jalan atau rute yang harus diikuti siswa untuk mencapai hasil yang diharapkan. Sedangkan (Armanto & Stephens, 2011) berpendapat bahwa *learning trajectory* adalah gambaran bagaimana siswa berpikir ketika belajar untuk mencapai tujuan matematika tertentu. Menurut (Nurdin, 2011), HLT merupakan asumsi tentang serangkaian kegiatan yang dilakukan siswa untuk memecahkan suatu masalah atau memahami suatu konsep. Sedangkan *learning*

*trajectory* adalah serangkaian kegiatan yang benar-benar dilalui siswa untuk memecahkan suatu masalah atau memahami suatu konsep.

Dari beberapa pendapat tersebut dapat disimpulkan bahwa HLT merupakan dugaan guru mengenai proses pembelajaran yang dapat diikuti siswa selama pembelajaran. Sedangkan *learning trajectory* adalah rangkaian aktivitas pemikiran dan keterampilan yang dialami siswa dalam memecahkan permasalahan.

Menurut (M. A. Simon, 1995) *hypothetical learning trajectory* terdiri dari tiga komponen, yaitu tujuan pembelajaran untuk pembelajaran bermakna, serangkaian tugas untuk mencapai tujuan-tujuan tersebut dan dugaan tentang cara belajar dan berpikir siswa (p.136). Tujuan belajar yang dimaksud disini dapat berupa memahami suatu konsep atau memecahkan suatu masalah matematika (Nurdin, 2011, p. 2).

Menurut Chen (2002) *learning trajectory* terdiri atas tiga komponen yaitu tujuan belajar (*the learning goals*), aktivitas belajar (*the learning activities*) dan proses belajar hipotetik (*hypothetical learning process*) (p. 9). Sedangkan komponen *learning trajectory* menurut (Clements & Sarama, 2004b) terdiri dari tujuan matematika, perkembangan siswa dalam mencapai tujuan dan serangkaian tugas instruksional (p. 3). Perbandingan konsep *hypothetical learning trajectory* dapat dilihat pada tabel 2.1 berikut ini.

**Tabel 2.1 Perbandingan Komponen *Learning Trajectory***

No.	Simon (1995)	Chen (2002)	Clement & Sarama (2004)
1	<i>Researcher-developer as goals</i> (tujuan pembelajaran)	<i>the learning goals</i> (tujuan pembelajaran)	tujuan matematika
2	<i>A set of task</i> (sekumpulan tugas)	<i>the learning activities</i> (aktivitas belajar)	serangkaian tugas instruksional
3	<i>Hypothesis about students' thinking and learning</i> (hipotesis tentang bagaimana siswa berpikir dan belajar)	<i>hypothetical learning process</i> (hipotesis proses belajar)	perkembangan siswa dalam mencapai tujuan

Berdasarkan tabel tersebut maka dapat disimpulkan bahwa *hypothetical learning trajectory* terdiri dari 3 komponen yaitu tujuan pembelajaran, serangkaian tugas dalam kegiatan pembelajaran dan dugaan tentang bagaimana siswa berpikir dan belajar.

Soedjadi (Nurdin, 2011) memberikan sebuah ilustrasi menarik tentang alur belajar (*learning trajectory*) seperti pada gambar berikut ini:



**Gambar 2.1 Ilustrasi tentang alur belajar**

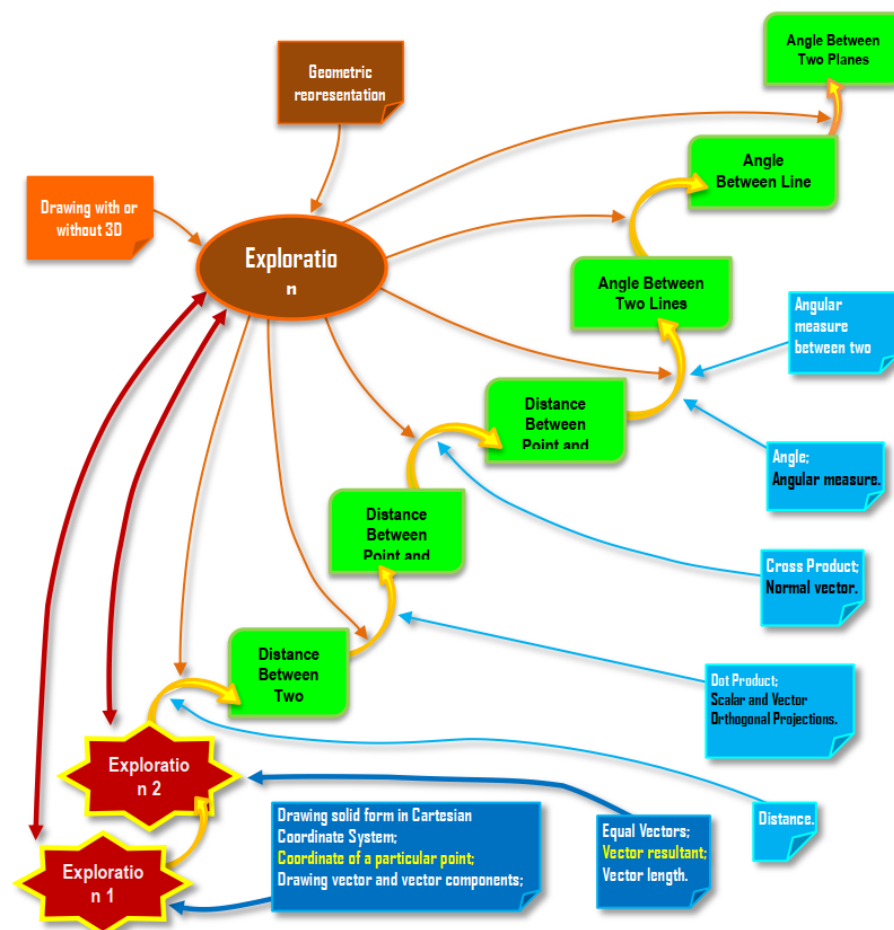
Lebih lanjut Soedjadi menjelaskan bahwa secara umum perkembangan kemampuan kognitif anak mulai dengan hal yang konkrit secara bertahap mengarah ke hal yang abstrak. Untuk setiap anak perkembangan dari tahap konkrit ke abstrak bisa berbeda-beda, ada yang cepat ada juga yang tidak cepat. Bagi yang cepat mungkin tidak memerlukan banyak tahapan, tetapi bagi yang tidak cepat, tidak mustahil perlu melalui banyak tahapan. Dengan demikian bagi setiap anak mungkin saja memerlukan *learning trajectory* atau alur belajar yang berbeda-beda.

Menurut (Nurdin, 2011) terdapat perbedaan mengenai *Hypothetical Learning Trajectory* (HLT) atau alur belajar hipotetik dan *Learning Trajectory* (LT) (p. 4). HLT adalah dugaan tentang rangkaian aktivitas yang dilalui anak dalam memecahkan suatu masalah atau memahami suatu konsep, sedangkan LT adalah suatu rangkaian aktivitas yang secara aktual yang dilalui anak dalam memecahkan masalah atau memahami suatu konsep. Jadi alur belajar yang sesungguhnya merupakan hasil revisi dari alur belajar hipotesis berdasarkan peristiwa yang terjadi saat pembelajaran atau memecahkan masalah berlangsung. (M. A. Simon, 1995) mendefinisikan *learning trajectory* bahwa hasil pengembangan peneliti sebagai tujuan pembelajaran yang menyenangkan, sebuah serangkaian tugas untuk mencapai tujuan tertentu dan hipotesis tentang berpikir dan belajar peserta didik (p. 136). Berdasarkan beberapa pendapat para ahli mengenai *learning trajectory* maka dapat disimpulkan bahwa *learning trajectory* adalah rangkaian aktivitas pemikiran dan keterampilan yang dialami peserta didik dalam memecahkan permasalahan atau memahami suatu konsep.

Kaitannya dengan matematika, *learning trajectory* menurut Simon & Tzur (2009) merupakan aspek kunci dari suatu perencanaan pembelajaran matematika (M. A. Simon & Tzur, 2009, p. 93). Clement dan Sarama berpendapat bahwa *learning trajectory* matematika merupakan deskripsi pemikiran dan belajar anak-anak dalam pelajaran

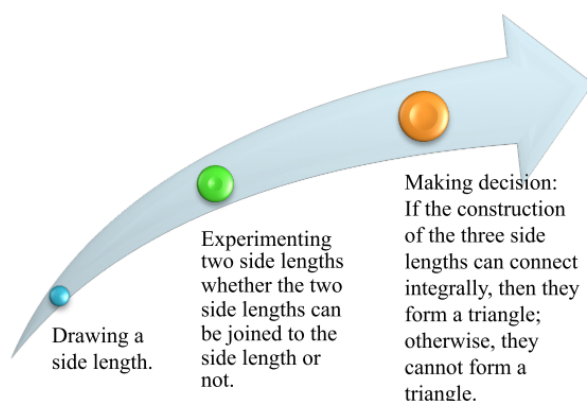
matematika tertentu dan menduga lintasan belajar melalui serangkaian tugas instruksional yang telah dirancang (Daro, Mosher, & Corcoran, 2011, p. 23) (Anwar & Rofiki, 2018, p. 2). Selain itu, guru bisa mendapatkan lintasan belajar yang tepat digunakan untuk membantu peserta didik dalam memahami sebuah konsep (Ramadhanti et al., 2015, p. 90), guru dapat mengembangkan langkah, strategi, model atau metode untuk mencapai tujuan pembelajaran dengan penilaian yang tepat sesuai dengan tahapan berpikir peserta didik (Andriyani & Maulana, 2019, p. 4; Surya, 2011), dapat mengefektifkan pembelajaran ditinjau dari kemampuan berpikir kritis dan kreatif (Hedayani, 2018, p. 166), serta dapat memfasilitasi tercapainya kemampuan pemecahan masalah yang baik pada siswa (Kurniawati & Rizkianto, 2018, p. 379).

Berikut ditampilkan mengenai contoh dari *learning trajectory* dengan materi dimensi tiga dengan menggunakan pendekatan analisis geometri yang disusun oleh (Setiadi, Mulyana, & Asih, 2019, p. 3).



**Gambar 2.2. Learning trajectory materi dimensi tiga menggunakan pendekatan analisis geometri**

Contoh yang lain mengenai *learning trajectory* siswa dalam konstruksi segitiga dari (Anwar & Rofiki, 2018, p. 4).



**Gambar 2.3. *Learning trajectory* siswa dalam mengkontruksi segitiga**

Hasil penelitiannya menunjukkan bahwa siswa menemukan persyaratan membentuk segitiga dengan panjang tiga sisi. Dalam kondisi ini, titik awal lintasan belajar siswa adalah menggambar segmen garis dari tiga panjang sisi yang diberikan. Siswa memeriksa dua sisi panjang apakah panjang sisi ini dapat digabungkan ke segmen garis sebagai segitiga atau tidak. Siswa menggunakan penggaris untuk menentukan panjang sisi tiga yang dapat membentuk segitiga. Mereka membuat pernyataan bahwa jumlah dari setiap dua sisi segitiga harus lebih besar dari sisi ketiga. Selain itu, guru harus mempertimbangkan lintasan belajar siswa untuk mencapai tujuan pembelajaran dengan sukses.

### 2.1.2 Argumentasi Matematis

Ungkapan yang sederhana, istilah “argumen” dimaknai sebagai alasan (Hornikx & Hahn, 2012, p. 226). Istilah ini sepadan dengan kata “argumentasi” yang bermakna sama, yaitu, alasan yang dipakai untuk memperkuat atau menolak suatu pendapat, pendirian, atau gagasan (KBBI). Akan tetapi dalam kamus Webster (Douek, 1999), kedua istilah ini memiliki makna berbeda (p. 250). Argumentasi dipandang sebagai proses menghasilkan wacana (diskursus) yang terhubung secara logis (tetapi tidak perlu deduktif) tentang topik yang diberikan; sedangkan argumen merupakan suatu alasan atau beberapa alasan yang ditawarkan untuk menentang atau menerima proposisi, opini atau mengukur, didalamnya termasuk argument verbal, data numerik, gambar dan lain-lain. Jadi sebuah argumentasi dapat terdiri dari satu atau lebih argumen yang terhubung secara logis.

Argumentasi adalah proses pengumpulan berbagai informasi yang diperlukan untuk mendukung klaim (S. Simon et al., 2006). Klaim sama halnya solusi dalam menyelesaikan masalah. Untuk mencapai pada solusi tersebut, siswa harus melalui beberapa tahapan yang harus jelas bagaimana tahapan tersebut dianggap benar. Pendapat lain, argumentasi diartikan sebagai proses berpikir dan interaksi sosial di mana individu tersebut membangun dan mengkritik argumen (Nussbaum, 2011). Secara lebih rinci, van Emmeren mengungkapkan argumentasi adalah aktivitas verbal dan sosial dari penalaran yang bertujuan untuk meningkatkan (atau penerimaan) sudut pandang yang berbeda bagi pendengar atau pembaca dengan mengedepankan perkumpulan dari proporsi yang dimaksud untuk mendengarkan (atau membantah) sudut pandang yang dihadapkan keputusan yang rasional (Blair, 2005). Argumentasi menurut (Driver & Osborne, 2000) adalah proses yang digunakan seseorang untuk menganalisis informasi kemudian dikomunikasikan kepada orang lain. Dengan kata lain argumentasi juga memiliki sifat persuasif atau dapat mempengaruhi pemikiran seseorang. Argumentasi menjadi keterampilan dan kecakapan hidup yang berguna di abad 21 baik dalam berkomunikasi, berinteraksi, berdialog, bernegosiasi, dan bermusyawarah (Cardetti & LeMay, 2019; Quintana & Correnti, 2019). Selain itu, selama dekade terakhir, pendidik sains berpandangan bahwa argumentasi penting untuk pemikiran ilmiah dan konstruksi pengetahuan dan hal itu juga harus menjadi pusat pembelajaran hasil dalam kurikulum sains (Felton & Gilabert, 2009).

Konteks yang lebih luas, argumentasi merupakan istilah yang berkaitan dengan aktivitas sosio-kultural. Johnson (Begona, 2014) berpendapat bahwa argumentasi adalah aktivitas sosio-kultural dari pengkonstruksian, penyajian, penafsiran, pengkritikan dan perevisian argumen. Sedangkan argument menurut Johnson merupakan saringan dari praktik argumentasi (p. 2). Senada dengan (Driver et al., 1998) mengartikan argumen sebagai aktivitas individu melalui berpikir dan menulis, atau sebagai aktivitas sosial yang terjadi dalam suatu kelompok (p. 290-291). Pendapat yang sama diungkap oleh van Emmeren *et al.* (1996) argumentasi adalah aktivitas verbal dan sosial dari penalaran yang bertujuan untuk meningkatkan (atau menurunkan) penerimaan sudut pandang yang kontroversial bagi pendengar atau pembaca dengan mengedepankan perkumpulan dari proporsi yang dimaksud untuk membenarkan (atau membantah) sudut pandang dihadapan keputusan yang rasional (p. 5).

Argumentasi juga dapat dimaknai sebagai wacana. Menurut (Wood, 1999) mengungkapkan bahwa argumentasi merupakan interaktif dari mengetahui bagaimana dan kapan berpartisipasi dalam pertukaran wacana (diskursif) (p. 172). Pertukaran wacana yang dimaksud oleh Wood adalah argument yang diartikan sebagai pertukaran wacana antar partisipan dengan tujuan meyakinkan pikiran orang lain melalui penggunaan pikiran dengan cara tertentu. Wacana, baik secara lisan ataupun tertulis merupakan salah satu jenis komunikasi (Lee, 2015, p. 366) dan perwujudan dari adanya interaksi sosial. Dalam hal ini menurut Banegas, argument merupakan tindakan spesifik dari interaksi sosial yang mungkin terjadi dalam setiap jenis diskusi (Aberdein & Dove, 2013).

Inch mengatakan berargumentasi merupakan bagian dari mengambil keputusan, mempertahankannya dan mempengaruhi orang lain menurut data yang disertai dengan rasionalisasi (Farida & Gusniarti, 2014, p. 32). Keputusan tersebut bisa berupa suatu solusi dari permasalahan atau keyakinan hasil penemuan (Farida & Gusniarti, 2014; Wojdak, 2010, p. 32;1). Argumen yang baik adalah argumen yang memenuhi kriteria yang ditentukan. Menurut Blair dan Johnson, argument yang baik harus mengandung ketiga kriteria, yaitu *relevance* (kesesuaian), *sufficiency* (kecukupan) dan *acceptability* (penerimaan). *Relevance* (kesesuaian) menyiratkan bahwa argumen terdapat hubungan yang cukup antara isi premis dan kesimpulan, *sufficiency* (kecukupan) bermakna bahwa argument berisikan bukti/fakta yang cukup untuk proses inferensi dan *acceptability* (penerimaan) adalah kenyataan dari premis yang sedang dibangun (Rosita et al., 2019a, p. 2).

Sementara dalam matematika, argumentasi sebagai sarana yang dapat mengembangkan kemampuan matematis siswa dalam pembuktian matematika (Laamena, 2017; Sukirwan, 2016), kemampuan berpikir kritis (Indrawatiningsih et al., 2019), kemampuan penalaran (Bieda et al., 2013; Nussbaum, 2011b, p. 11;85), kemampuan pemahaman (Lameena et al., 2018, p. 1) dan kreativitas matematis (Begona, 2014). Oleh karena itu, pembelajaran matematika perlu diarahkan untuk pengembangan peserta didik dalam berargumentasi. Terkait dengan wacana dan interaksi sosial, Krummheuer (2007) menyatakan bahwa argumentasi adalah salah satu jenis interaksi sosial yang berperan penting dalam membangun pemahaman matematis siswa (p. 62). Argumentasi adalah wacana sosial (Rumsey & Langrall, 2016, p. 414) yang menuntut

para pendidik matematika untuk membantu siswa mengenali dan berpartisipasi dalam menghasilkan argumentasi (Hoyles & Kuchemann, 2002; NCTM, 2000), p. 195; NCTM, 2000, p. 56). Secara khusus, (Rumsey & Langrall, 2016) menyebut istilah argumentasi matematis sebagai proses wacana sosial dinamis untuk menemukan ide-ide baru matematika dalam rangka meyakinkan kebenaran dari suatu klaim (p. 414). Sementara itu (Knudsen, Meloy, Steven, & Rutstein, 2014) memandang argumentasi matematis sebagai jenis khusus dari wacana yang tujuannya adalah menentukan kebenaran pernyataan matematis (p. 495).

Argumentasi menurut (Soekisno, 2015) merupakan cara individu bagaimana secara rasional dalam mengatasi setiap pertanyaan, isu-isu serta membantah dan mengatasi setiap masalah (p. 123). Hal tersebut bisa membuat seseorang bisa dengan bijak menghadapi masalah serta sangat ideal untuk diterapkan dalam pembelajaran matematika karena menurut Jonassen bahwa argumentasi matematis cukup esensial dalam mengatasi sebagian besar jenis masalah, baik masalah yang terstruktur maupun tidak terstruktur (Soekisno, 2015).

Argumen dalam matematika menurut (Umah, Asari, & Sulandra, 2016) menyebutkan bahwa argumen dapat dinyatakan dalam logika formal maupun informal. Aberdein menjelaskan bahwa perbedaan antara logika formal dan informal dapat diartikan dalam berbagai cara karena ambiguitas dari kata “formal”, namun kata informal tidak meninggalkan prinsip normative dan ketepatan. Logika informal lebih menyangkut argumen yang dapat dinyatakan secara handal oleh bentuk logis murni dan komponen-komponen proposisi, melainkan argument tersebut diekspresikan dalam Bahasa alamiah (Umah et al., 2016, p. 2).

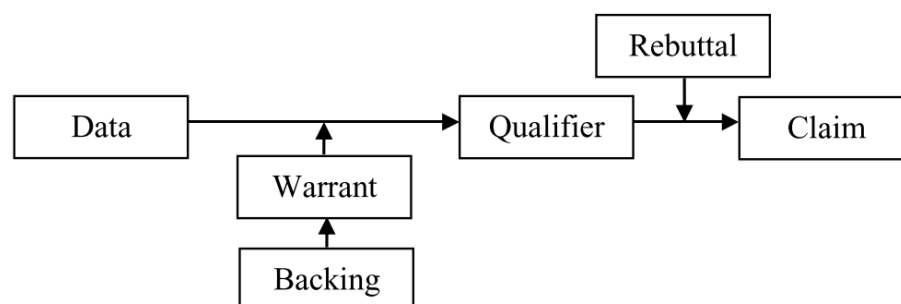
Toulmin sebagai pelopor argumentasi menjelaskan bahwa argumen matematis dapat digambarkan sebagai urutan pernyataan dan alasan (data, jaminan, dukungan) yang bertujuan untuk menunjukkan bahwa klaim (kesimpulan) benar atau salah (Cardetti & LeMay, 2019). Menurut (Vincent et al., 2005) argumentasi matematis didefinisikan sebagai proses menghubungkan pernyataan atau ide matematika secara logis. Argumentasi sebagai wahana untuk mendukung penalaran matematika dan meningkatkan pemikiran matematika siswa telah secara signifikan didukung oleh peneliti pendidikan sebagai hasil dari pemahaman yang lebih baik tentang proses belajar matematika (Cardetti & Lemay, 2018, p. 4). Berargumentasi berarti membangun aktifitas



sosiokultural melalui presentasi, interpretasi, kritik, dan revisi terhadap suatu argument (Hakyolu & Ogan-bekiroglu, 2011, p. 264).

Berdasarkan beberapa pendapat para ahli mengenai argumentasi matematis maka dapat disimpulkan bahwa argumentasi matematis adalah ungkapan dalam bentuk lisan atau tulisan sebagai aktivitas individu untuk mengambil sebuah keputusan secara rasional dan logis dalam memutuskan cara atau penyelesaian yang tepat untuk menyelesaikan masalah dalam matematika.

Argumentasi memiliki beberapa indikator acuan. Tokoh yang memelopori argumentasi adalah Toulmin (1958). Adapun indikator argumentasi Toulmin berjumlah 6 diantaranya *claim*, *data*, *warrant*, *qualifier*, *backing* dan *rebuttal* (Toulmin, 2003). *Claim* (C) yakni pernyataan atau kesimpulan yang dibuat berdasarkan data. *Data* (D) adalah ‘fondasi’ argumen didasarkan, fakta-fakta yang relevan dengan klaim. *Warrant* (W) seperti ‘jembatan’ yang menghubungkan data dan klaim dan menjadi dasar pikir atau alasan yang digunakan untuk menghasilkan kesimpulan. *Warrant* dapat berbentuk: rumus, definisi, aksioma atau teorema maupun membuat analogi, gambar atau diagram dan grafik. *Warrant* diperkuat oleh *backing* (B) yang merupakan bukti-bukti lanjut atau alasan tambahan yang dibutuhkan. *Rebuttal* (R) adalah pernyataan yang membantah kesimpulan yang dihasilkan jika kondisi tidak dipenuhi. (Fatmawati et al., 2018; Laamena, 2017; Toulmin, 2003).

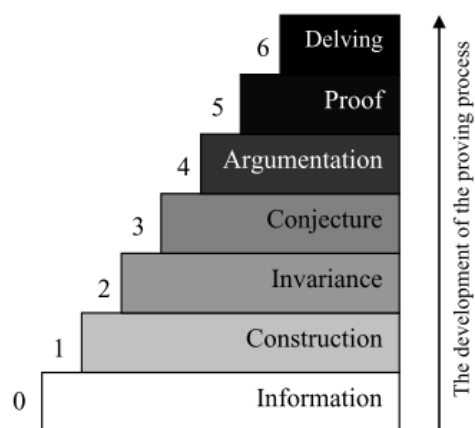


**Gambar 2.4. Skema Argumentasi Toulmin**

Argumentasi matematis menurut (Knudsen, Meloy, et al., 2014) dapat dilihat sebagai kegiatan sosial dengan tiga bagian, di mana siswa bekerja bersama untuk (1) *make conjectures* (membuat dugaan), (2) *justify the conjectures* (membenarkan dugaan), dan (3) *decide whether they are true or false (i.e., conclude)* (memutuskan apakah itu benar atau salah (menyimpulkan)) (p. 495). Lebih lanjut (Knudsen, Meloy, et al., 2014) menjelaskan mengenai ketiga hal yang telah disebutkan diantaranya; *conjecturing*

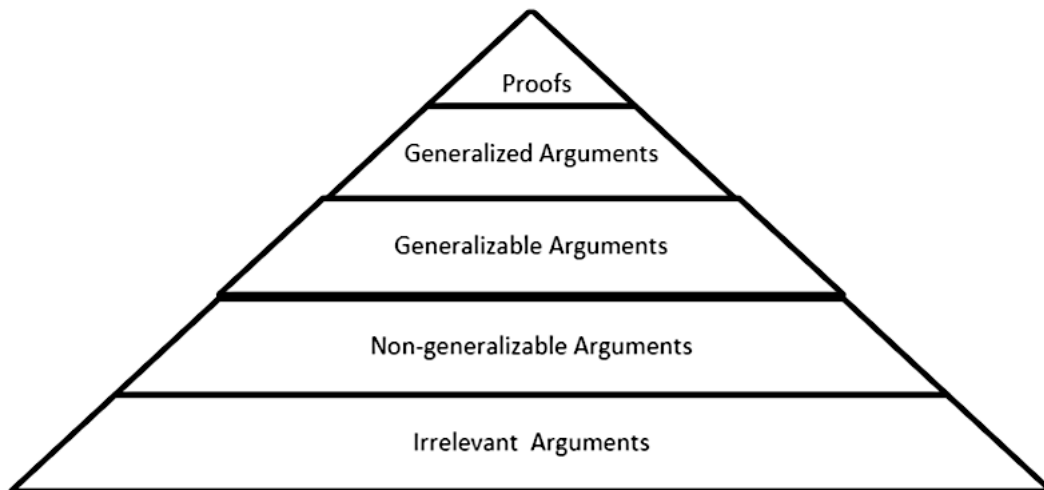
(dugaan) adalah proses menebak secara sadar atau pencarian pola untuk membuat pernyataan matematis tentang validitas matematika yang belum ditentukan; *justifying* (membenarkan) adalah proses menjelaskan alasan seseorang untuk menetapkan validitas matematika dari suatu konteks; *concluding* (menyimpulkan) adalah prosesnya datang persetujuan atau kesepakatan tentang validitas dugaan dan pembedarannya (p. 495).

Skema (Nguyen, 2012) mengajukan 6 level argumentasi melalui taksonomi skema pembuktian (p. 1732). (Nguyen, 2012) menyoroti proses pembuktian sebagai serangkaian tindakan mental dan fisik, seperti: menulis atau berpikir garis bukti, menggambar atau memvisualisasikan diagram, memproduksi argument, dan lain-lain (p. 1731). 6 Level proses pembuktian menurut (Nguyen, 2012) yang merepresentasikan fase perkembangan dalam proses pembuktian, mencakup: *level 0* (informasi), menyediakan siswa dengan informasi yang jelas ditunjukkan untuk menunjukkan bagian-bagian utama dari masalah, yang tidak diketahui, data, dan kesimpulan; *level 1* (konstruksi) memandu siswa pada model dan konstruksi angka-angka dalam lingkungan geometri dinamis; *level 2* (invarian) membimbing siswa untuk mencari geometri *invariant* yang mendukung dalam menghasilkan ide-ide untuk bukti; *level 3* (dugaan) mendukung siswa dalam mmerumuskan dugaan yang sering berasal dari kegiatan eksperimental; *level 4* (argumentasi) membimbing siswa untuk menghasilkan argument dengan menjelaskan ‘fakta yang diobservasi’ dan memvalidasi dugaan yang dirumuskan; *level 5* (bukti) membimbing siswa untuk menulis bukti berdasarkan argument yang dihasilkan; *level 6* (*delving*/penyelidikan) menyarankan siswa untuk menyelidiki masalah seperti generalisasi, spelisasi, analogi, dan lain-lain. Skema dari level argumentasi Nguyen, digambarkan sebagai berikut.



**Gambar 2.5. Skema Argumentasi Nguyen**

Sementara itu, (Nordby, 2013) mengajukan taksonomi skema argumentasi dalam bentuk kerucut. Mirip dengan skema argumentasi Nguyen bahwa untuk mencapai level bukti, dibutuhkan pengalaman yang memadai, sehingga sedikit siswa yang sampai hingga level tersebut. Skema dari Nordby diilustrasikan pada gambar berikut.



**Gambar 2.6. Skema Argumentasi Nordby**

Kemudian (Nordby, 2013) mengajukan 5 level argumentasi, mencakup: *formal proof*, *generalized argument*, *generalizable argument*, *non-generalizable argument*, and *irrelevant argument* (p. 61). *Proof* adalah argument yang mempekerjakan logika deduktif formal, dalam hal ini menggunakan definisi, hasil sebelumnya, serta penalaran deduktif untuk menentukan kebenaran dari pernyataan matematika dalam cara yang konsisten dengan standar yang digunakan pada matematika level tinggi. *Generalized argument* adalah argument yang tidak memenuhi kekakuan formal dari bukti matematis, tetapi berisi dan menjelaskan ide-ide dan karakteristik dari bukti formal (*prototype* dari bukti yang valid). Suatu *generalized argument* dapat berbentuk induktif, empiris, atau bentuk gambar, tetapi berhubungan dengan bukti matematis serta bebas dari contoh konkret. *Generalizable argument* adalah argument yang berisi satu atau lebih contoh memuat ciri atau pola yang dapat diperluas menjadi argument umum atau bukti formal, tetapi ciri atau pola tersebut tidak ditunjukkan secara eksplisit. *Non-generalizable argument* adalah argument yang berisi satu atau lebih contoh tetapi ciri atau pola kunci yang mendukung generalisasi tidak dihadirkan dan dapat diperluas menjadi bukti formal. Yang terakhir adalah *irrelevant argument* adalah argument yang tidak berhubungan dengan masalah atau hubungan dengan pernyataan awal tidak jelas.

Lebih lanjut (Liu, 2013) melakukan studi mengenai tipe argument yang dihasilkan yang berorientasi pada cara-cara siswa dalam merepresentasikan argumentasi. Liu mengelompokkan argument menjadi 4 kategori, yaitu: induktif, aljabar, visual dan perseptual (p. 82). **Argumen induktif** merupakan argument dengan menawarkan beberapa contoh yang mendukung validitas dari konjektur yang diajukan. Ciri-cirinya adalah argumentasi dikonstruksi melalui representasi numerik (memuat angka-angka), mengambil beberapa sampel kasus, ada konklusi perantara dan ada pengajuan konjektur; **argumen aljabar** adalah argumen dengan menampilkan representasi simbolik pada persamaan-persamaan matematis yang sifatnya kaku. Ciri-ciri umum yang ditemukan adalah menggunakan simbol, menggunakan kontra contoh dan menggambarkan kalimat matematika yang sifatnya kaku; **argumen visual** adalah argument yang mengandalkan grafik dan gambar untuk memberikan penjelasan tentang bukti. Ciri-cirinya adalah menyajikan gambar yang memuat penjelasan tentang klaim, menjelaskan hubungan antar unsur pada gambar, mengaitkan objek matematis yang diketahui dengan objek matematis lainnya atau yang lebih umum. Gambar menjadi kekuatan utama dari argumentasi pada tipe ini; dan **argumen perseptual** adalah argument yang berkaitan dengan masalah untuk konteks yang dikenal dan didukung oleh konjektur melalui suatu koneksi. Ciri-ciri utama adalah menggunakan gambar atau tulisan berdasarkan persepsi atau imajinasi peserta didik, umumnya berupa uraian atau penjelasan yang memerlukan penjelasan lebih lanjut, menggunakan pengalaman *hand on activity*.

Argumentasi matematika adalah salah satu cara penting untuk secara efektif melibatkan siswa dalam pemahaman konseptual mendalam tentang matematika yang tidak diragukan lagi bermanfaat bagi pembelajaran siswa. Klipatrick dan Jane mengungkapkan sangat diperlukan untuk berargumentasi dalam matematika dikarenakan supaya peserta didik dapat menjelaskan secara logis dan memutuskan cara atau penyelesaian yang tepat untuk menyelesaikan masalah (Wulandari et al., 2016, p. 112). Argumentasi matematis sangat penting untuk dikembangkan. Sebagaimana yang disampaikan oleh (NCTM, 2000, p. 15) Keterampilan berpikir dan bernalar matematis, termasuk membuat dugaan dan mengembangkan argumen deduktif yang kuat merupakan sesuatu yang penting karena hal itu berfungsi sebagai dasar untuk mengembangkan wawasan baru dan mempromosikan studi lebih lanjut.

Argumentasi juga merupakan sarana yang dapat mengembangkan kemampuan matematis siswa dalam berbagai hal diantaranya pembuktian matematika (Hoyles & Kuchemann, 2002; Laamena, 2017; Sukirwan, 2016), kemampuan berpikir kritis (Indrawatiningsih et al., 2019), kemampuan penalaran (Bieda et al., 2013; Nussbaum, 2011b, p. 11;85), kemampuan pemahaman matematika (Lameena et al., 2018, p. 1; Rosita et al., 2019, p. 2); (Rumsey & Langrall, 2016) dan kreativitas matematis (Begona, 2014). Oleh karena itu, pembelajaran matematika perlu diarahkan untuk pengembangan siswa dalam berargumentasi matematis.

Berikut adalah contoh soal tipe argumentasi matematis dapat dilihat pada pernyataan berikut; Rian mengklaim bahwa diagonal dari suatu persegi Panjang lebih Panjang dari masing-masing sisinya.

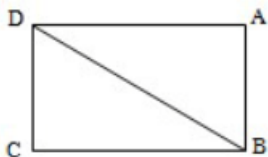
Dalam studi (Liu, 2013), tipe-tipe argument yang menjelaskan pernyataan tersebut adalah sebagai berikut:

(1) Argumen Induktif

Saya menggambar beberapa persegi panjang serta mengukur panjang dari sisi-sisi dan diagonalnya. Saya menemukan bahwa diagonal dari persegi panjang tersebut lebih panjang dari sisi-sisi persegi panjang. Jadi pernyataan Rian pasti benar untuk semua persegi panjang.

(2) Argumen Aljabar

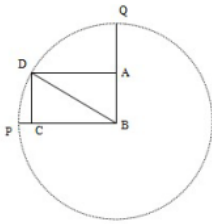
Seperti yang diperlihatkan pada gambar di bawah, ABCD adalah suatu persegi panjang.



Karena besar  $\angle A = 90^\circ$ , maka berdasarkan teorema Pythagoras,  $BD^2 = AB^2 + AD^2$ . Jadi  $BD^2 > AB^2$  dan  $BD^2 > AD^2$ . Dengan demikian,  $BD > AB$  dan  $BD > AD$ .

(3) Argumen Visual

Misalkan ABCD adalah sebuah persegi Panjang. Dengan B sebagai titik pusat dan BD sebagai jari-jari, sebuah lingkaran digambar, seperti nampak pada gambar berikut.



Berdasarkan gambar tersebut, kita dapat melihat bahwa  $BD = BQ = BP$ . Karena  $BC < BP$  dan  $BA < BQ$ , maka  $BA$  dan  $BC$  masing-masing lebih kecil dari  $BD$ . Dengan demikian, diagonal dari suatu persegi panjang harus lebih panjang dari sisi-sisinya.

#### (4) Argumentasi Perseptual

Bayangkan jika kamu berdiri dipojok suatu lapangan sepak bola. Jelas bahwa diagonal dari lapangan tersebut lebih Panjang dari sisi-sisinya. Jadi, klaim Rian haruslah benar.

## 2.2 Penelitian yang Relevan

Beberapa penelitian yang relevan dengan penelitian ini adalah hasil penelitian yang telah dilakukan oleh peneliti-peneliti sebelumnya, diantaranya adalah sebagai berikut:

(Anwar & Rofiki, 2018) yang berjudul “*Investigating students’ learning trajectory: a case on triangle*”. Hasil dari penelitiannya menunjukkan bahwa siswa menemukan persyaratan membentuk segitiga dengan panjang tiga sisi. Dalam kondisi ini, titik awal lintasan belajar siswa adalah menggambar segmen garis dari tiga panjang sisi yang diberikan. Siswa memeriksa dua sisi panjang apakah panjang sisi ini dapat digabungkan ke segmen garis sebagai segitiga atau tidak. Siswa menggunakan penggaris untuk menentukan panjang sisi tiga yang dapat membentuk segitiga. Mereka membuat pernyataan bahwa jumlah dari setiap dua sisi segitiga harus lebih besar dari sisi ketiga. Selain itu, guru harus mempertimbangkan lintasan belajar siswa untuk mencapai tujuan pembelajaran dengan sukses.

Setiadi, Mulyana, & Asih, (2019) yang berjudul “*Learning trajectory of three dimensions’ topic through analytical geometry approach*”. Hasil penelitiannya adalah *learning trajectory* yang terbentuk dari materi dimensi tiga melalui pendekatan geometri analitik dapat bermanfaat untuk mengatasi *learning obstacle* yang mempelajari topik ini melalui pendekatan geometri Euclide. *Learning trajectory* ini juga memberikan makna

dan dasar untuk penerapan materi vektor. Representasi geometri dari topik vektor berperan penting dari pada pendekatan aljabar. Pendekatan analitik membuat penyelesaian masalah dimensi tiga menjadi lebih mudah tanpa kehilangan konsep apapun. *Learning trajectory* ini juga menyiratkan perlunya mengubah cara belajar mengajar topik vector tidak hanya dalam bentuk aljabar, tetapi juga representasi geometri dan juga *learning trajectory* baru dan desain didaktis untuk topik vector.

Andriyani & Maulana, 2019 yang berjudul "*Cubaritme in the trajectory learning of multiplication concept*". Penelitian ini menghasilkan lintasan pembelajaran konsep perkalian siswa tunanetra dengan menggunakan metode penemuan terbimbing. Lintasan tersebut diperoleh dari hipotesis lintasan pembelajaran yang dirancang melalui tiga tahap, yaitu persiapan eksperimen, eksperimen desain, dan analisis retrospektif. Berdasarkan hasil penelitian ditemukan bahwa dalam lintasan pembelajaran konsep perkalian siswa diketahui telah mengoptimalkan kemampuan taktilnya ketika menggunakan kubaritme dalam pembelajaran konsep perkalian. Kemampuan taktil yang dipengaruhi oleh persepsi sentuhan sintetik, membantu siswa memahami konsep perkalian dengan baik dan mencapai KKM yang ditentukan.

(Liu et al., 2016) yang berjudul "*What do eight grade students look for when determining if a mathematical argument is convincing*". Hasil analisisnya mengenai aspek (mode/tipe argumentasi) dan fitur (kategori dari setiap mode/tipe argumentasi) argument itu berdampak terhadap evaluasi siswa dalam berargumen.

(Kirkpatrick, 2016) yang berjudul "*The effect of argumentation on student motivation in mathematics*" melakukan penelitian terhadap siswa sekolah menengah yang mengkonstruksi argumen yang valid dan mengkritisi alasan orang lain memberikan pengaruh yaitu meningkatnya *self-esteem* siswa.

(Umah et al., 2016) yang berjudul "Struktur argumentasi penalaran kovariasional siswa kelas VIII B MTsN 1 Kediri". Struktur yang digunakan dalam penelitiannya berdasarkan teori Argumentasi Toulmin. Hasil dari penelitian ini mengungkapkan bahwa subjek belum memiliki struktur argument yang lengkap. Secara umum subjek membangun argument secara induktif. Peran "*backing*" menjadi esensial ketika argument subjek didukung oleh contoh-contoh kasus yang mengantarkan pada suatu kesimpulan, sementara "*qualifier*" dan "*rebuttal*" tidak muncul pada struktur argument mereka.

(Sukirwan, Darhim, Herman, & Prahmana, 2017) yang berjudul “*The students’ mathematical argumentation in geometry*”. Hasil dari penelitiannya menunjukkan bahwa pada dasarnya masih banyak siswa yang mengalami kendala dalam berargumentasi, tetapi kualitas penalarannya muncul sebagai variasi dari argumen yang muncul, meliputi: induktif, aljabar, visual dan perseptual. Selain itu, titik awal siswa menyusun serangkaian argumen umumnya dimulai dari klaim yang muncul dalam suatu masalah. Bukti klaim lebih lanjut dibangun di atas hubungan antara karakteristik data dengan objek matematika yang muncul dalam pengetahuan matematika yang diperoleh dari siswa sebelumnya. Hubungan dijabarkan dalam serangkaian pernyataan dan alasan yang mendukung klaim melalui keempat argument.

(Laamena, 2017) yang berjudul “Karakteristik *warrant* dalam argumentasi dan pembuktian matematis”. Hasil penelitiannya menunjukkan bahwa *warrant* induktif dapat menghasilkan klaim yang benar. *Warrant* dapat dikelompokkan menjadi *warrant* bersifat lemah dan *warrant* bersifat kuat.

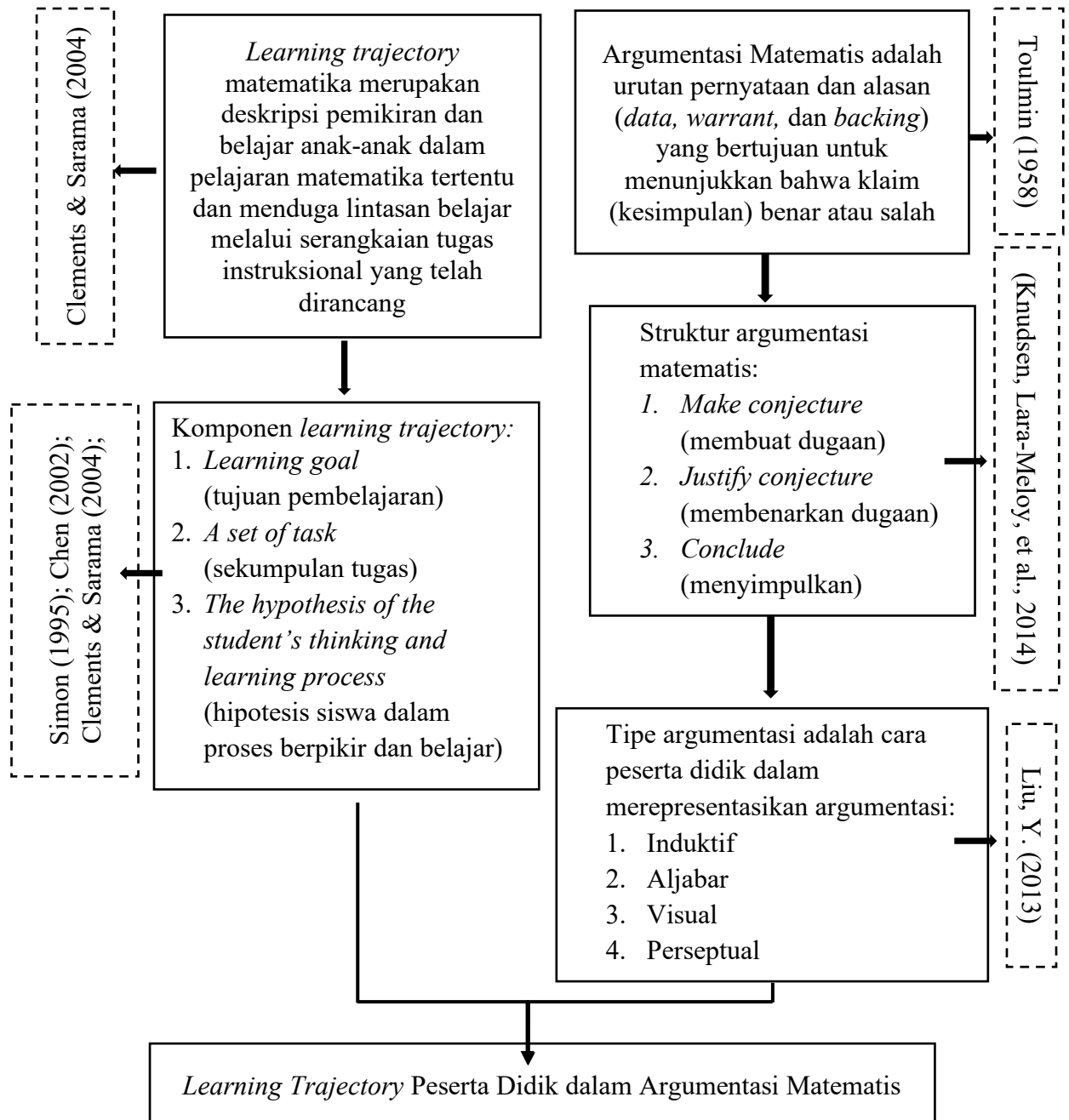
(Nordin & Boistrup, 2018) yang berjudul “*A framework for identifying mathematical arguments as supported claims created in day-to-day classroom interactions*”. Hasil penelitiannya adalah mereka telah merekonstruksi argumentasi matematis secara sistematis, diantaranya (1) mengidentifikasi klaim dalam transkrip, (2) mencari data yang mendukung setiap klaim, (3) mencari *warrant* yang memotivasi bagaimana data tersebut mendukung klaim, (4) mencari kemungkinan dukungan untuk *backing* menuju *warrant*, dan (5) menginterpretasikan elemen yang diidentifikasi dengan mempertimbangkan konteks tertentu, saat menulis argument yang direkonstruksi itu sebagai klaim yang mendukung.

Indrawatiningsih, Purwanto, As’ari, Sa’dijah, & Dwiwana, (2019) yang berjudul “*Students’ mathematical argumentation ability in determining arguments or not arguments*”. Hasil penelitiannya menunjukkan bahwa mahasiswa yang memiliki kemampuan akademik tinggi masih belum mampu menganalisis lebih detail tentang suatu argumenasi sehingga disebut tidak memiliki kemampuan berpikir kritis. Sedangkan mahasiswa yang berkemampuan akademik sedang, mampu menganalisis bahwa informasi yang diberikan termasuk argumen atau tidak dan mampu membenarkannya sehingga dapat disimpulkan bahwa ia memiliki kemampuan berpikir



kritis. Dapat diartikan bahwa peserta didik yang memiliki kemampuan akademis tinggi tersebut tidak begitu paham tentang suatu argumen.

### 2.3 Kerangka Teoretis



**Gambar 2.7 Kerangka Teoretis**

Siswa dalam mempelajari sebuah konsep pembelajaran mempunyai alur belajar sendiri yang mereka alami, sama seperti halnya saat keterampilan motorik kasar mereka

mulai berkembang dari awal mula belajar merangkak, berjalan, berlari kemudian melompat dan akhirnya mereka dapat melompat dengan kecepatan dan ketangkasan yang ditargetkan. Begitu juga dalam pembelajaran, mereka mengikuti perkembangan alamiah dalam proses belajar, khususnya dalam matematika. Mereka belajar mengenai ide-ide dan keterampilan mereka dengan cara mereka sendiri. Ketika para guru memahami alur perkembangan ini dan membuat kegiatan berurutan berdasarkan alur perkembangan siswa, mereka membangun lingkungan belajar matematika yang sangat efektif yang sesuai dengan tahapan perkembangan. Alur belajar matematika siswa dari keterampilan awal menuju keterampilan berikutnya inilah yang disebut dengan *Learning Trajectory* (lintasan belajar).

Istilah *learning trajectory* atau alur belajar pertama kali dikenalkan oleh (M. A. Simon, 1995) yaitu *hypothetical learning trajectory* (HLT) (p. 133). Menurut Simon HLT merupakan dugaan guru tentang alur belajar yang mungkin terjadi dalam pembelajaran di kelas (p. 135). Simon menggunakan istilah "*hypothetical*", karena alur belajar yang sebenarnya (*actual learning trajectory*) tidak diketahui di awal. Alur belajar yang sesungguhnya hanya dapat diketahui setelah pembelajaran berlangsung.

Beberapa tokoh yang mempunyai pandangan yang sama mengenai *learning trajectory*, antara lain (Clements & Sarama, 2004a) berpendapat bahwa *learning trajectory* adalah deskripsi pemikiran dan pembelajaran anak-anak dalam materi matematika tertentu dan rute yang terkira terkait serangkaian tugas instruksional yang dirancang untuk melahirkan proses mental atau tindakan yang dihipotesiskan untuk menggerakkan anak-anak melalui perkembangan tingkat berpikir, yang dikembangkan dengan tujuan mendukung prestasi anak-anak dari tujuan khusus dalam materi matematika itu (p. 83). Kemudian (Daro, Mosher, & Corcoran, 2011) yang berpendapat bahwa *learning trajectory* adalah jalan atau rute yang harus diikuti siswa untuk mencapai hasil yang diharapkan. Sedangkan (Armanto & Stephens, 2011) berpendapat bahwa *learning trajectory* adalah gambaran bagaimana siswa berpikir ketika belajar untuk mencapai tujuan matematika tertentu. Menurut (Nurdin, 2011) HLT merupakan asumsi tentang serangkaian kegiatan yang dilakukan siswa untuk memecahkan suatu masalah atau memahami suatu konsep. Sedangkan *learning trajectory* adalah serangkaian kegiatan yang benar-benar dilalui siswa untuk memecahkan suatu masalah atau memahami suatu konsep.

Menurut (M. A. Simon, 1995) *hypothetical learning trajectory* terdiri dari tiga komponen, yaitu tujuan pembelajaran untuk pembelajaran bermakna, serangkaian tugas untuk mencapai tujuan-tujuan tersebut dan dugaan tentang cara belajar dan berpikir siswa. Tujuan belajar yang dimaksud disini dapat berupa memahami suatu konsep atau memecahkan suatu masalah matematika (Nurdin, 2011, p. 2). Menurut Chen (2002) *learning trajectory* terdiri atas tiga komponen yaitu tujuan belajar (*the learning goals*), aktivitas belajar (*the learning activities*) dan proses belajar hipotetik (*hypothetical learning process*) (p. 9). Sedangkan komponen *learning trajectory* menurut (Clements & Sarama, 2004b) terdiri dari tujuan matematika, perkembangan siswa dalam mencapai tujuan dan serangkaian tugas instruksional (p. 3).

Argumentasi adalah proses pengumpulan berbagai informasi yang diperlukan untuk mendukung klaim (S. Simon et al., 2006). Argumentasi diartikan sebagai proses berpikir dan interaksi sosial di mana individu tersebut membangun dan mengkritik argumen (Nussbaum, 2011). Secara lebih rinci, van Emmeren mengungkapkan argumentasi adalah aktivitas verbal dan sosial dari penalaran yang bertujuan untuk meningkatkan (atau penerimaan) sudut pandang yang berbeda bagi pendengar atau pembaca dengan mengedepankan perkumpulan dari proporsi yang dimaksud untuk mendengarkan (atau membantah) sudut pandang yang dihadapkan keputusan yang rasional (Blair, 2005). Argumentasi menurut (Driver & Osborne, 2000) adalah proses yang digunakan seseorang untuk menganalisis informasi kemudian dikomunikasikan kepada orang lain. Argumentasi merupakan istilah yang berkaitan dengan aktivitas sosio-kultural. Johnson (Begona, 2014) berpendapat bahwa argumentasi adalah aktivitas sosio-kultural dari pengkonstruksian, penyajian, penafsiran, pengkritikan dan perevisian argumen. Sedangkan argumen menurut Johnson merupakan saringan dari praktik argumentasi (p. 2).

Toulmin sebagai pelopor argumentasi menjelaskan bahwa argumen matematis dapat digambarkan sebagai urutan pernyataan dan alasan (*data, warrant, dan backing*) yang bertujuan untuk menunjukkan bahwa klaim (kesimpulan) benar atau salah (Cardetti & LeMay, 2019). Menurut (Vincent et al., 2005) argumentasi matematis didefinisikan sebagai proses menghubungkan pernyataan atau ide matematika secara logis.

Argumentasi matematis menurut (Knudsen, Meloy, et al., 2014) dapat dilihat sebagai kegiatan sosial dengan tiga bagian, di mana siswa bekerja bersama untuk (1)

*make conjectures* (membuat dugaan), (2) *justify the conjectures* (membenarkan dugaan), dan (3) *decide whether they are true or false (i.e., conclude)* (memutuskan apakah itu benar atau salah (menyimpulkan)) (p. 495). Lebih lanjut (Knudsen, Meloy, et al., 2014) menjelaskan mengenai ketiga hal yang telah disebutkan diantaranya; *conjecturing* (dugaan) adalah proses menebak secara sadar atau pencarian pola untuk membuat pernyataan matematis tentang validitas matematika yang belum ditentukan; *justifying* (membenarkan) adalah proses menjelaskan alasan seseorang untuk menetapkan validitas matematika dari suatu konteks; *concluding* (menyimpulkan) adalah prosesnya datang persetujuan atau kesepakatan tentang validitas dugaan dan pembedarannya (p. 495).

Mengenai tipe argumen (Liu, 2013) melakukan studi mengenai tipe argument yang berorientasi pada cara-cara siswa dalam merepresentasikan argumentasi. Liu mengelompokkan argumen menjadi 4 kategori, yaitu: induktif, aljabar, visual dan perseptual (p. 82). **Argumen induktif** merupakan argumen dengan menawarkan beberapa contoh yang mendukung validitas dari konjektur yang diajukan. Ciri-cirinya adalah argumentasi dikonstruksi melalui representasi numerik (memuat angka-angka), mengambil beberapa sampel kasus, ada konklusi perantara dan ada pengajuan konjektur; **argumen aljabar** adalah argumen dengan menampilkan representasi simbolik pada persamaan-persamaan matematis yang sifatnya kaku. Ciri-ciri umum yang ditemukan adalah menggunakan simbol, menggunakan kontra contoh dan menggambarkan kalimat matematika yang sifatnya kaku; **argumen visual** adalah argument yang mengandalkan grafik dan gambar untuk memberikan penjelasan tentang bukti. Ciri-cirinya adalah menyajikan gambar yang memuat penjelasan tentang klaim, menjelaskan hubungan antar unsur pada gambar, mengaitkan objek matematis yang diketahui dengan objek matematis lainnya atau yang lebih umum. Gambar menjadi kekuatan utama dari argumentasi pada tipe ini; dan **argumen perseptual** adalah argumen yang berkaitan dengan masalah untuk konteks yang dikenal dan didukung oleh konjektur melalui suatu koneksi. Ciri-ciri utama adalah menggunakan gambar atau tulisan berdasarkan persepsi atau imajinasi peserta didik, umumnya berupa uraian atau penjelasan yang memerlukan penjelasan lebih lanjut, menggunakan pengalaman *hand on activity*.

## 2.4 Fokus Penelitian

Moleong (2016) mengatakan bahwa pembatasan masalah merupakan tahap yang sangat menentukan dalam penelitian kualitatif walaupun sifatnya masih tentatif (masih dapat berubah) (p. 97). Sehingga implikasinya, peneliti membatasi masalah studinya. Adapun yang menjadi fokus penelitian ini adalah menganalisis *learning trajectory* dalam argumentasi matematis peserta didik menurut Knudsen (2014) yaitu *make conjecture, justify the conjecture and conclude* dalam menyelesaikan masalah matematika berdasarkan tipe (cara merepresentasikan) argumentasi matematis menurut (Liu, 2013) yaitu induktif, aljabar, visual dan perseptual pada materi segi empat.